

Energieentzug aus der Strömung  $\rightarrow$  <sup>Konversion</sup> Wandlung in mechanische Energie  
 $\rightarrow$  Umsetzung in elektrische Energie.

Spargelbrauch! Keine Energieproduktion!

Energie-Verluste  $\rightarrow$  Rotation des strömenden Mediums  
 hervorgerufen durch Form und Reibung  
 der Rotorblätter

Annahmen

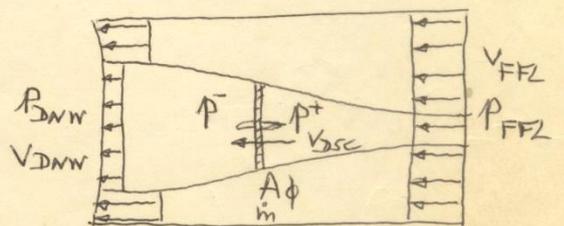
1. Keine Reibung
2. Stromröhre mit definierter Begrenzung  
 (Trennung der Strömung durch den Rotor von  
 der Strömung außerhalb)
3. Keine statischen Druckunterschiede.  
 Weit vor und weit hinter dem Rotor gleicher  
 Druck entsprechend der ungestörten, freien  
 Strömung  $P_{DNW} = P_{FFL}$
4. Schubbelastung über die betrachtete Fläche  
 ist konstant
5. Durch den drehenden Rotor erfolgt keine  
 Drehung der Strömung, paralleles Abströmen.

Schub:  $T = \text{eintretender Impuls} - \text{ausstretender Impuls}$

$$T = \dot{m} (V_{FFL} - V_{DNW}) = \rho \cdot A_\phi \cdot V_{DSC} (V_{FFL} - V_{DNW}) \quad (1)$$

Schub aus  $p$ :

$$T = A_\phi (p^+ - p^-) \quad (2)$$



Die Summe aus kinetischer-, Druck- und potentieller-  
 Nach Bernoulli vor der Turbine: (2)

$$\frac{\rho}{2} V_{FFL}^2 + p_{FFL} = \frac{\rho}{2} V_{DSC}^2 + p^+ \quad (3)$$

Energie ist  
 längs einer  
 Stromlinie  
 unveränderlich

hinter der Turbine

$$\frac{\rho}{2} V_{DNW}^2 + p_{FFL} = \frac{\rho}{2} V_{DSC}^2 + p^-$$

(a) Geschwindigkeit  
 hohe

(4) (b) Durchhöhe  
 (c) Geschwindigkeit Höhe

(a)  $\frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$   
 Stromlinie Kurve aus Punkten  
 in (2) wo in jedem Punkt  
 Geschwindigkeitsvektor  
 tangential

(3) und (4)

$$p^+ - p^- = \frac{\rho}{2} (V_{FFL}^2 - V_{DNW}^2)$$

mit (2)

$$\text{Schub } T = \frac{\rho}{2} A_\phi (V_{FFL}^2 - V_{DNW}^2) \quad (5)$$

(5) und (1)

$$\frac{\rho}{2} A_\phi (V_{FFL}^2 - V_{DNW}^2) = \rho \cdot A_\phi \cdot V_{DSC} (V_{FFL} - V_{DNW})$$

$$V_{DSC} = \frac{V_{FFL} + V_{DNW}}{2} \quad (6)$$

Definition eines axialen Strömungsfaktors  $a$ :

$$V_{DSC} = V_{FFL} - a \cdot V_{FFL} = V_{FFL} (1-a) \quad (6')$$

(6') und (6)

$$V_{FFL} (1-a) = \frac{V_{FFL} + V_{DNW}}{2}$$

Geschwindigkeit weit hinter der Turbine

$$V_{DNW} = V_{FFL} (1-2a) \rightarrow a = 1 - \frac{V_{FFL} + V_{DNW}}{2 V_{FFL}} \quad (7)$$

d.h. für  $V_{DNW} = 0$  volle Abbremsung der Strömung (Wend)

$$a = \frac{1}{2} \quad V_{DSC} = \frac{V_{FFL}}{2}$$

Die Leistung ist durch den Massendurchsatz und dem spez. kinetischen Energie-Unterschied bestimmt (3)

$$P = \dot{m} \cdot \Delta E_{kin} = \dot{m} \cdot \left( \frac{V_{FFL}^2}{2} - \frac{V_{DNW}^2}{2} \right)$$

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A_\phi \cdot V_{DSC} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\rho}{2} \cdot A_\phi \cdot V_{FFL}^3 \cdot 4a(1-a)^2$$

$$\text{oder } P = 2\rho A_\phi V_{FFL}^3 a(1-a)^2 \quad (8)$$

Maximale Leistung  $\rightarrow \frac{dP}{da} = 0$

$$\frac{dP}{da} = 2\rho A_\phi V_{FFL}^3 (1 - 4a + 3a^2) = 0$$

$$a = 1 \quad \rightarrow \quad P = 0$$

$$a = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad P_{max} = \frac{16}{27} \left( \frac{\rho}{2} \cdot A_\phi \cdot V_{FFL}^3 \right) \quad (9)$$

$$\frac{16}{27} \approx 0,593$$

$$C_p \equiv \frac{P}{\frac{\rho}{2} A_\phi V_{FFL}^3}$$

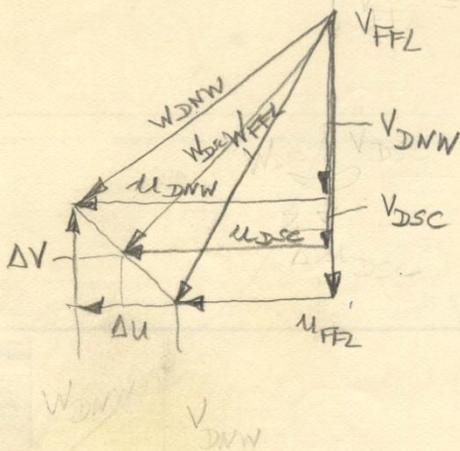
$$P = C_p \cdot \frac{\rho}{2} V_{FFL}^3 \cdot A_\phi \quad (10)$$

$$\xi = \frac{V_{DNW}}{V_{FFL}} \quad (11)$$

Betz 1926 maximaler Energieertrag aus einer reibungs- und drallfreien Strömung?

# Strömungsbetrachtung mit Drehl

(4)



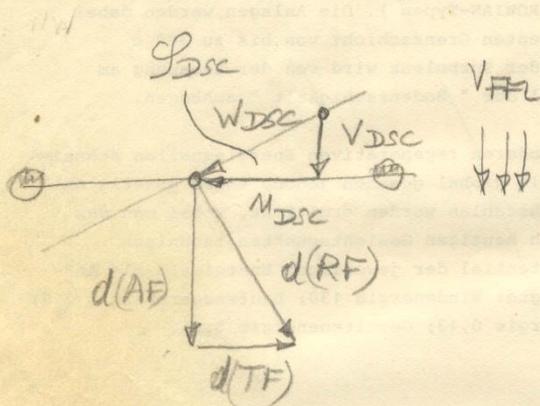
$$V_{DSC} = \frac{V_{FFL} + V_{DNW}}{2} \quad (6)$$

$$\phi = \frac{V_{DNW}(A)}{V_{FFL}}$$

Schneckenföhl

$$\frac{M}{V} = \lambda \quad (12)$$

$$\frac{M_{DSC}}{V_{DSC}} = \frac{1}{\tan \varphi_{DSC}} = \lambda_{DSC} \quad (12')$$



$$\left. \begin{aligned} d m(r) \cdot \Delta V(r) &= d(AF) \\ d m(r) \cdot \Delta M(r) &= d(TF) \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\frac{\Delta V(r)}{\Delta M(r)} = \frac{d(AF)}{d(TF)}$$

$$\frac{M_{DSC}}{V_{DSC}} = \frac{d(AF)}{d(TF)} = \frac{1}{\tan \varphi_{DSC}} \quad (14)$$

aus (13) und (14)

$$\Delta V \cdot V_{DSC} = \Delta M \cdot M_{DSC} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{DSC} &= M_{FFL} + \Delta \frac{M}{2} \\ V_{DSC} &= V_{FFL} - \frac{\Delta V}{2} \end{aligned} \right\} (16) \quad \text{Aus dem Geschwindigkeitsdreieck}$$

(16) in (15)

$$\Delta V \cdot V_{FFL} - \Delta \frac{V^2}{2} = \Delta M \cdot M_{FFL} + \Delta \frac{M^2}{2} \quad (17)$$

Leistungsbeziehung:

$$C_{P(r)} \cdot \frac{S}{2} \cdot v_{FFL}^3 \cdot dA_{\phi(r)} = \overbrace{S \cdot v_{DSC}}^{dim} \cdot dA_{\phi(r)} \left[ \frac{v_{FFL}^2}{2} - \left( \frac{v_{DZW}^2 + \Delta M^2}{2} \right) \right] \quad (18)$$

$$C_{P(r)} = \frac{v_{DSC}}{v_{FFL}^3} \left[ v_{FFL}^2 - v_{DZW}^2 - \Delta M^2 \right] \quad \text{mit (11)}$$

$$C_P = \frac{v_{DSC}}{v_{FFL}} \left[ 1 - \xi^2 - \left( \frac{\Delta M}{v_{FFL}} \right)^2 \right] \quad (19)$$

aus (17) durch erweitern mit  $\frac{2}{M_{FFL}^2} \cdot \frac{v_{FFL}^2}{v_{FFL}^2} - \lambda_{FFL}^2 = \lambda_{\omega}^2$  erhält man:

$$\frac{1}{\lambda_{\omega}^2} \left[ \frac{2\Delta V}{v_{FFL}} - \left( \frac{\Delta V}{v_{FFL}} \right)^2 \right] = \frac{2\Delta M}{M_{FFL}} + \left( \frac{\Delta M}{M_{FFL}} \right)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Erweitern} \\ +1 \end{array} \right\}$$

$$1 + \frac{2\Delta V}{v_{FFL} \lambda_{\omega}^2} - \left( \frac{\Delta V}{v_{FFL} \lambda_{\omega}^2} \right)^2 = 1 + \frac{2\Delta M}{M_{FFL}} + \left( \frac{\Delta M}{M_{FFL}} \right)^2 \quad (20)$$

$$\Delta V = v_{FFL} - v_{DZW} \rightarrow \frac{\Delta V}{v_{FFL}} = 1 - \xi \rightarrow \Delta V = v_{FFL} (1 - \xi)$$

(20) in (20)

$$1 + \frac{2(1-\xi) - (1-\xi)^2}{\lambda_{\omega}^2} = \left( 1 + \frac{\Delta M}{M_{FFL}} \right)^2$$

$$R \equiv \sqrt{1 + \frac{1-\xi^2}{\lambda_{\omega}^2}} = 1 + \frac{\Delta M}{M_{FFL}} \quad (22)$$

$$\Delta M = M_{FFL} \cdot R - M_{FFL} = (R-1) M_{FFL} \quad (23)$$

Aus (19) ergibt sich

$$C_{P(r)} = \frac{v_{DSC}}{v_{FFL}} \left[ 1 - \xi^2 - (R-1)^2 \lambda_{\omega}^2 \right] \quad (24)$$

mit (16) und (21) erhält man

$$C_{P(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{2} [1-\alpha^2 - (R-1)^2 \lambda_w^2] \quad (25)$$

12.12.80

Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} (R-1)^2 \lambda_w^2 &= (R^2 - 2R + 1) \lambda_w^2 = \left(1 + \frac{1-\alpha^2}{\lambda_w^2} - 2R + 1\right) \lambda_w^2 \\ &= \left(2 - 2R + \frac{1-\alpha^2}{\lambda_w^2}\right) \lambda_w^2 = 2\lambda_w^2 + (1-\alpha^2) - 2R\lambda_w^2 \end{aligned}$$

einsetzen in (25)

$$C_{P(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{2} \left[ \cancel{(1-\alpha^2)} - 2\lambda_w^2 + 2R\lambda_w^2 - \cancel{(1-\alpha^2)} \right]$$

$$C_{P(\alpha)} = (1+\alpha) \lambda_w^2 [R-1] \quad (26)$$

ideales örtlicher Leistungswert mit Drill, ohne Reibung und ohne Berücksichtigung einer Blattohle ( $z=\infty$ )

Grenzbetrachtung:

für  $\lambda_w^2 \gg (1-\alpha^2)$  wird  $R$  (22)  $\approx 1 + \frac{1-\alpha^2}{2\lambda_w^2}$

$$R = \sqrt{1 + \frac{1-\alpha^2}{\lambda_w^2}} \approx \sqrt{1 + \frac{1-\alpha^2}{2\lambda_w^2} + \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\lambda_w^4}} \quad \text{oder } R-1 = \frac{1-\alpha^2}{2\lambda_w^2} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(1 + \frac{1-\alpha^2}{2\lambda_w^2}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{1-\alpha^2}{2\lambda_w^2} \end{aligned} \quad (27) \text{ in } (26) \text{ ergibt}$$

$$C_{P(\alpha)} = \frac{(1-\alpha^2)}{2} (1+\alpha) \quad \text{Prandtl/Betz (28)}$$

$$\frac{dC_{P(\alpha)}}{d\alpha} = \frac{1}{2} (1 - 2\alpha - 3\alpha^2) = 0 \rightarrow 2\alpha + 3\alpha^2 - 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{3} / -1$$

Huber	$\lambda_w = 5$	10	20	0	1 05	$\alpha_{opt} = \frac{1}{3}$
$C_{P \text{ ideal, Huber}}$	= 0,5874	0,5913	0,5922	0	0,4992	
					0,3781	

Berücksichtigung der Rotorblattreibung am aerodynamischen Profil sowie Berücksichtigung der Blattzahl  $z$  ⑦

$$C_P = \eta_z \cdot \eta_{LDR} \cdot C_{P \text{ ideal}} \quad (28') \quad \eta_{LDR} \equiv \eta_E$$

$$C_{P \text{ ideal}} = \frac{(1 - \alpha^2)}{2} (1 + \alpha) \quad \text{Prandtl / Betz} \quad (28)$$

$\alpha = 1 \rightarrow \frac{V_{DNW}}{V_{FFL}} = 1$  keine Abminderung der Strömung

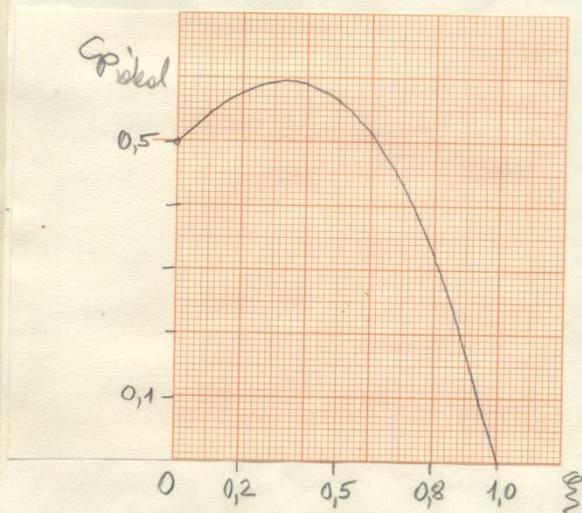
$\alpha = 1/3 \rightarrow C_P = 0$  optimale Abminderung (Ablenkung) d. Strömung  
 $\rightarrow \frac{V_{DNW}}{V_{FFL}} = 16/27 \approx 0,59259, \dots$   
 $\alpha = 0 \rightarrow \frac{V_{DNW}}{V_{FFL}} = 0$  volle Abbremsung der Strömung

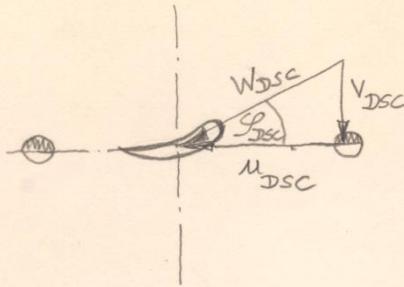
$$C_P = 1/2$$

$$\alpha = \frac{V_{DNW}}{V_{FFL}}$$

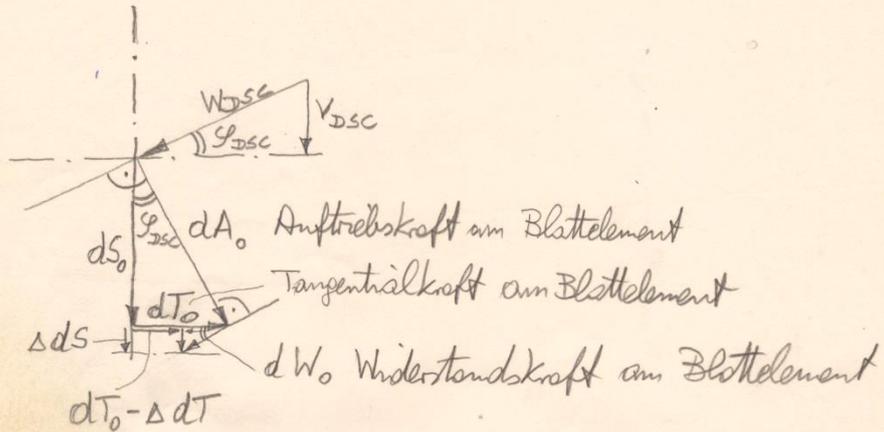
5A  $\alpha$

21	11
63	05
35	01
-14	
51	
21	12
35	02
-14	
16	-11
16	-11
21	01
36	01
-14	
53	
-22	
01	
-55	
02	
-24	
36	01
01	
-55	
-35	
-14	
36	01
36	02
-55	
35	01
16	-11
01	
-45	
16	-34
51	
36	01
51	





$$\frac{M_{DSC}}{V_{DSC}} = \lambda_{DSC} = \frac{1}{\tan \varphi_{DSC}}$$



$$\frac{dA_0}{dW_0} \equiv LDR \equiv \text{Lift to Drag Ratio} \quad (29)$$

$$\lambda_{DSC} = \frac{M_{DSC}}{V_{DSC}} = \frac{W_{DSC} \cos \varphi_{DSC}}{W_{DSC} \sin \varphi_{DSC}} = \frac{1}{\tan \varphi_{DSC}}$$

$$\varphi_{DSC} = \arctan 1/\lambda_{DSC} \quad (29')$$

$$P = \omega \cdot M = \omega \cdot r \cdot T$$

Ansplattung in zwei Effekte

$$\eta_{LDR} = \eta_{\Delta T} \cdot \eta_{\Delta S}$$

1. Änderung der Tangentialkraft

$\eta_{\Delta T}$  (Leistungsänderung)

$$\eta_{\Delta T} = \frac{r \cdot \omega_{RTR} (dT_0 - \Delta dT)}{r \cdot \omega_{RTR} dT_0} = 1 - \frac{\Delta dT}{dT_0} = 1 - \frac{dW_0 \cos \varphi_{DSC}}{dA_0 \sin \varphi_{DSC}}$$

$$\eta_{\Delta T} = 1 - \frac{\lambda_{DSC}}{LDR} \quad (30)$$

## 2. Änderung des Schlusses $\eta_{AS}$

9

Mit Massendurchsatz ohne Blattreibung:

$$dS_0 = \dot{m}_0 \Delta V \equiv dA_\phi \cdot S \cdot v_{DSC} \left[ \frac{v_{FFL} (1 - \epsilon_0)}{2} \right]$$

$$dS_0 = dA_\phi \cdot \frac{S}{2} \cdot v_{FFL}^2 (1 - \epsilon_0^2) \quad (31)$$

wobei berücksichtigt wurde, daß  $\Delta V = v_{FFL} - v_{DNW} = v_{FFL} (1 - \epsilon_0)$

und  $v_{DSC} \approx \left[ \frac{1 + \epsilon_0}{2} \right] v_{FFL}$  ist

$$v_{DSC} = \frac{v_{FFL} + v_{DNW}}{2} \quad (6)$$

$$= \frac{(1 + \epsilon_0)}{2} \cdot v_{FFL}$$

Massendurchsatz mit Blattreibung analog: (31):

$$dS_0 + \Delta dS = \dot{m}_\Delta \Delta V \equiv \underbrace{A_\phi \frac{S}{2} v_{FFL}^2}_{Q} (1 - \epsilon_\Delta^2) \quad (32)$$

$$\frac{dS_0 + \Delta dS}{dS_0} = 1 + \frac{\Delta dS}{dS_0} = \frac{Q (1 - \epsilon_\Delta^2)}{Q (1 - \epsilon_0^2)} \quad (33)$$

Aus trigonometrischen Beziehungen erhält man weiter

$$\frac{\Delta dS}{dW_0} = \sin \varphi_{DSC} \quad \frac{dS_0}{dA_0} = \cos \varphi_{DSC}$$

$$\text{also } \frac{\Delta dS}{dS_0} = \frac{dW_0 \sin \varphi_{DSC}}{dA_0 \cos \varphi_{DSC}} = \frac{1}{LDR \cdot \lambda_{DSC}} \quad (34)$$

aus (33) und (34)

$$\left[ 1 + \frac{1}{LDR \cdot \lambda_{DSC}} \right] (1 - \epsilon_0^2) = 1 - \epsilon_\Delta^2 \rightarrow \epsilon_\Delta = \sqrt{1 - (1 + \epsilon_Q) (1 - \epsilon_0^2)} \quad (35)$$

Wir definieren mit (6)

$$\eta_{AS} = \frac{\dot{m}_\Delta}{\dot{m}_0} = \frac{A_\phi S \cdot v_{DSC,\Delta}}{A_\phi S \cdot v_{DSC,0}} = \frac{(1 + \epsilon_\Delta)}{(1 + \epsilon_0)} \quad (36)$$

$$\eta_{LDR} = \eta_{\Delta T} \cdot \eta_{\Delta S}$$

$$= \left[ 1 - \frac{\lambda_{DSC}}{LDR} \right] \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (1 + \epsilon_Q)(1 - \epsilon_3^2)}}{1 + \epsilon_3} \right] \quad (37)$$

$$\eta_{LDR} = (LDR - \lambda_{DSC}) \left( 1 + \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{LDR \lambda_{DSC}}\right) (1 - \epsilon_3^2)} \right) / LDR \cdot (1 + \epsilon_3)$$

mit der Abkürzung  $K \equiv (LDR \cdot \lambda_{DSC} + 1)(1 - \epsilon_3^2) / LDR \cdot \lambda_{DSC}$  (38) ergibt sich

$$\eta_{LDR} = (LDR - \lambda_{DSC}) (1 + \sqrt{1 - K}) / LDR (1 + \epsilon_3) \quad (39)$$

6.12.84

9.1.81

Für  $\lambda_{DSC}$  kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} u_{DSC} &= u_{FFL} + \frac{\Delta u}{z} \\ v_{DSC} &= v_{FFL} - \frac{\Delta v}{z} \end{aligned} \right\} (16) \quad \begin{aligned} \Delta u &= (R-1) u_{FFL} \quad (23) \\ \Delta v &= (1-\epsilon_3) v_{FFL} \quad (21) \end{aligned}$$

wobei  $R \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \epsilon_3^2}{\lambda_{\omega}^2}\right)}$  (22)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{v_{DSC}}{v_{FFL}} &= 1 \\ \epsilon_3 &= 1 \\ \lambda_{DSC} &= \lambda_{\omega} \end{aligned} \right.$$

$$\lambda_{DSC} = \lambda_{\omega} \frac{(R+1)}{(1+\epsilon_3)} \quad (40) \quad \rightarrow \quad \lambda_{DSC} = \lambda_{\omega} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1 - \epsilon_3^2}{\lambda_{\omega}^2}\right)} + 1}{1 + \epsilon_3} \quad (40')$$

Einfluß der Blattzahl  $\geq$

endliche Blattzahl  $\rightarrow$  Einfluß der stetigen Wirbelablösung berücksichtigt

Betz rechnet mit einem reduzierten Durchmesser

$$D_{red} = D - 0,44 \cdot t_0$$

Pronottl rechnet ebenso mit einem reduzierten Durchmesser. Er setzt die nach rückwärts abgehenden Wirbelschichten durch ein System quer zur Strömungsrichtung und errechnet

$$D_{red} = D \left( 1 - 1,39 \frac{\sin \varphi}{z} \right)$$

für den Leistungsbeiwert ergibt sich nach Hutter <sup>bestätigt durch</sup> (Versuche) (11)

$$C_{P,z} = C_{P,z=\infty} \cdot \left(1 - 2 \ln 2 \frac{\sin \varphi_{DSC}}{z}\right)^2$$

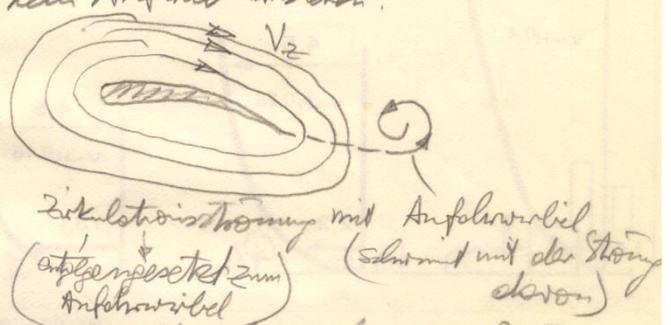
$$\eta_z = \frac{C_{P,z}}{C_{P,z=\infty}} = \left(1 - 2 \ln 2 \frac{V_{DSC}}{z \cdot W_{DSC}}\right)^2$$

$$\eta_z = \left(1 - \frac{2 \ln 2 \cdot V_{DSC}}{z \cdot \sqrt{V_{DSC}^2 + M_{DSC}^2}}\right)^2 = \left(1 - \frac{2 \ln 2}{z \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}}\right)^2 \quad (41)$$

Auftrieb  $\rightarrow$  Impulsstromänderung in vertikaler Richtung  
 Tragflügel muß Luft nach unten ablenken  
 Lord Rayleigh: Flügel muß um eigenes Fallen zu verhindern Luft nach unten "werfen"

Impulsatz  $A = V_s \cdot \rho \cdot W \quad [N]$   
 $V_s \equiv$  sekundlich vom Flügel abgelenktes Luftvolumen  $[m^3/s]$   
 $\rho \equiv$  Luftdichte  $[kg/m^3]$   
 $W \equiv$  Zunahme der vertikalen Geschwindigkeitskomponente der Luft nach unten  $[m/s]$

Nach Ludwig Prandtl (1914): Auftrieb entsteht durch die Überlagerung einer Parallelströmung mit einer Zirkulationsströmung  
 Die Parallelströmung könnte nur ohne Föhring aufrechterhalten werden, es würde kein Auftrieb entstehen.



Die Zirkulationsströmung bleibt am Flügel bestehen solange die Strömung anliegt.  
 Stärke der Zirkulationswirbels (Zirkulation)  $\Gamma$

$\Gamma = v_z \cdot U \quad [m^2/s]$   
 $v_z \equiv$  Zirkulationsgeschw.  $[m/s]$   
 $U \equiv$  Umfang der Zirkulationswirbel  $[m]$

$\Gamma = \oint w \cos \theta \, ds$   
 Geschlossener Weg durch ein bewegtes Medium,  $\theta=0, \cos \theta=1 \rightarrow w$  tangential zum Weg  
in einem perf. Medium mit const. Gesamtdruck  $P = const$  u. unablängig von Weg

Die Größe des Auftriebs wird durch die Stärke der Zirkulation bestimmt

Kutta / Joukowski

$A = c_a \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot b \cdot t = \rho \cdot v \cdot b \cdot \Gamma \quad [N]$

$\Gamma = \frac{c_a}{2} \cdot v \cdot t \quad [m^2/s]$   
 $v \equiv$  Anströmgeschwindigkeit  $[m/s]$   
 $b \equiv$  Spannweite des aus einem unendlich breiten Flügel herausgeschnittene Flügelstückes  $[m]$   
 $t \equiv$  Flügeltrieb  $[m]$

Die Zirkulation ergibt auf Flügeloberseite eine Geschwindigkeitserhöhung um  $v_z$ , an der Flügelunterseite eine Geschwindigkeitsabminderung um  $v_z$

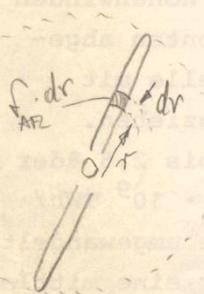
Anwendung auf einen Rotorflügel

$$dA = C_{L,AFZ} \cdot \frac{s}{2} \cdot f_{AFZ} \cdot W_{DSC}^2 \cdot dr = s \cdot W_{DSC} \cdot dr \cdot \Gamma \quad (42) \quad \left[ \frac{kg \cdot m}{sec^2} = N \right]$$

wobei  $\Gamma = C_{L,AFZ} \cdot f_{AFZ} \cdot W_{DSC} / 2 \quad (43)$

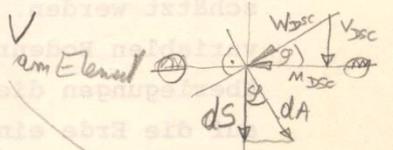
Schwellenanzahl  $\lambda = \frac{u}{V} = \frac{r \cdot \omega}{V_{FFZ}}$

$\dot{u} = d\Gamma n = 2 + \Gamma n$   
 $\omega = 2\pi n$   
 $n \equiv \text{Drehzahl} \left[ \frac{1}{s} \right]$



Gleichgewicht

$dS_{Schub} = dm \cdot \Delta V$



Durchsatz

Auftriebskomponente in Achsrichtung

Dichte  $\rho$

$dA$

$\Delta V = (1 - \epsilon) V_{FFZ}$

$$C_{L,AFZ} \cdot \frac{s}{2} \cdot W_{DSC}^2 \cdot z \cdot f_{AFZ} \cdot dr \cdot \cos \varphi_{DSC} = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot V_{DSC} \cdot (V_{FFZ} - V_{DMW}) \quad (44)$$

$$C_{L,AFZ} \cdot \frac{1}{2} \cdot W_{DSC}^2 \cdot z \cdot f_{AFZ} \cdot \frac{u_{DSC}}{W_{DSC}} = 2\pi r \cdot V_{DSC} \cdot (1 - \epsilon) V_{FFZ}$$

$\frac{z \cdot f_{AFZ}}{2\pi r}$   $C_{L,AFZ} \cdot u_{DSC} \cdot W_{DSC} = V_{DSC} \cdot V_{FFZ} (1 - \epsilon) \cdot 2 \quad (45)$

$\int_{(1)}^{(2)}$  Blattbreitenfunktion

$$\int_{(1)}^{(2)} C_{L,AFZ} = \frac{V_{DSC} \cdot V_{FFZ} (1 - \epsilon) \cdot 2}{u_{DSC} \cdot W_{DSC}} \quad (46)$$

Es ist aber

$W_{DSC} = V_{DSC} \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}$  und  $\frac{V_{FFZ}}{V_{DSC}} = \frac{2}{1 + \epsilon}$

$$\rightarrow \int_{(1)}^{(2)} C_{L,AFZ} = \frac{V_{DSC}}{u_{DSC}} \cdot \frac{4 \cdot (1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon) \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}} = \frac{4(1 - \epsilon)}{(1 + \epsilon)} \cdot \frac{1}{\lambda_{DSC} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}} \quad (47)$$

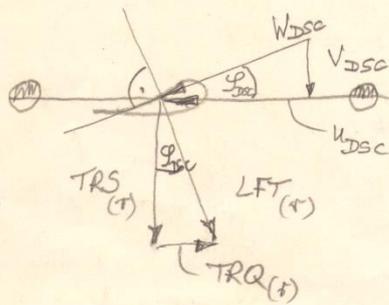
oder  $\int_{(1)}^{(2)} C_{L,AFZ} = 4(R - 1) \lambda_{\omega} / ((1 + \epsilon) \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}) \quad (48) \quad R \equiv (22)$

Für die Blattriefe ergibt sich:

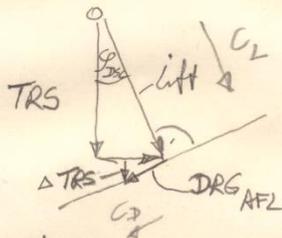
$$f_{AFZ} = \frac{8\pi r (1 - \frac{\sigma}{2})}{(1 + \frac{\sigma}{3}) \cdot z \cdot C_{L,AFZ} \cdot \lambda_{DSC} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}} \quad (49)$$

16.1.81

Schubbeiwert bezogen auf die Rotorkreisfläche:



- TRS  $\equiv$  thrust
- LFT  $\equiv$  lift
- TRQ  $\equiv$  torque
- DRG  $\equiv$  drag



Schubbeiwert

$$\Sigma \text{THRAUST} \equiv C_{TRS} \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\Sigma A_{AFZ}} \cdot \frac{\rho}{2} V_{FFL}^2 = \Sigma f_{AFZ} \cdot dr \cdot \frac{\rho}{2} W_{DSC}^2 (C_{L,AFZ} \cos \varphi + C_{D,AFZ} \sin \varphi)$$

$$C_{TRS} = \frac{z f_{AFZ} \cdot C_{L,AFZ}}{2\pi r} \cdot \frac{W_{DSC}}{V_{FFL}^2} \cdot \frac{U_{DSC}}{W_{DSC}} \left[ 1 + \left( \frac{C_D}{C_L} \right)_{AFZ} \cdot \frac{V_{DSC}}{U_{DSC}} \right] \quad (50)$$

$$= \eta_{(1)} \cdot C_{L,AFZ} \cdot \frac{\sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}}{\lambda_{DSC}} \cdot \left( \frac{U_{DSC}}{V_{DSC}} \right) \cdot \left( \frac{V_{DSC}}{V_{FFL}} \right)^2 \cdot \left[ \frac{1}{\lambda_{DR}} \right] \cdot \frac{1}{\lambda_{DSC}}$$

Setzt man ein:

$$\eta_{(1)} \cdot C_{L,AFZ} = \frac{4(1 - \frac{\sigma}{3})}{1 + \frac{\sigma}{3}} \cdot \frac{1}{\lambda_{DSC} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}} \quad (47) \quad \text{und} \quad V_{DSC}^2 = V_{FFL}^2 \frac{(1 + \frac{\sigma}{3})^2}{4} \quad (6)$$

erhält man:

$$C_{TRS} = \lambda_{DSC} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2} \cdot \frac{(1 + \frac{\alpha}{2})^2}{4} \cdot \frac{4(1 - \frac{\alpha}{2})}{1 + \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 \cdot [1 + \frac{1}{LDR \cdot \lambda_{DSC}}]}{\lambda_{DSC} \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}} \quad (51)$$

$$C_{TRS} = (1 - \frac{\alpha^2}{2}) (1 + 1 / LDR \cdot \lambda_{DSC}) \quad (52)$$

$$C_{TRS} = \frac{(1 - \frac{\alpha^2}{2}) LDR \cdot \lambda_{DSC} + (1 - \frac{\alpha^2}{2})}{LDR \cdot \lambda_{DSC}} = \frac{(1 - \frac{\alpha^2}{2}) (1 + LDR \cdot \lambda_{DSC})}{LDR \cdot \lambda_{DSC}} \quad (53)$$

$$\equiv K \quad (38)$$

Widerstandsbeiwert  
 nach  $H_z$   
 Widerstandsbeiwert bezogen auf die Restströmfläche

$C_{D, RTR} \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} C_{ZAFZ}(\alpha) \quad (54)$

$$(2) Re = \frac{W_{DSC} \cdot f_{AFZ}}{\nu} \quad (55)$$

Reynoldszahlen

$$(1) Re^* = \frac{r \cdot v_{FFZ}}{\nu} \quad (56)$$

$$Re = \frac{Re^* \cdot \frac{(1 + \frac{\alpha}{2})}{2} \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2} \cdot \frac{f_{AFZ}}{\nu}}{r}$$

$$Re = Re^* \cdot \frac{4\pi \cdot (1 - \frac{\alpha}{2}) \cdot (1 + \frac{\alpha}{2}) \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}}{2 \cdot (1 + \frac{\alpha}{2}) \cdot z \cdot C_{ZAFZ} \cdot \lambda_{DSC} \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}}$$

$$Re = Re^* \cdot \frac{4\pi (1 - \frac{\alpha}{2})}{z \cdot C_{ZAFZ} \cdot \lambda_{DSC}} \quad (57)$$

$$v_{FFZ} = \frac{Re^* \cdot \nu}{r}$$

$$W_{DSC} = v_{DSC} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}$$

$$v_{DSC} = v_{FFZ} \frac{(1 + \frac{\alpha}{2})}{2}$$

$$W_{DSC} = v_{FFZ} \frac{(1 + \alpha) \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}}{2}$$

$$W_{DSC} = \frac{Re^* \cdot \nu \cdot (1 + \frac{\alpha}{2})}{r} \cdot \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2} \cdot 2$$

$$\nu_{Luft} \approx 15,1 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

$$C_P \equiv \frac{\text{Rotorwellenleistung}}{V_{FFL}^3 A_\phi \cdot \frac{s}{z}}$$

$$C_{DTRQ} \equiv C_{TRS} \equiv \frac{\text{Rotorschub}}{V_{FFL}^2 A_\phi \cdot \frac{s}{z}}$$

$$\Pi \equiv \frac{\text{Installierte Generatorleistung}}{A_\phi} \quad (58)$$

Leistung  $P = M \omega$

$$P = C_P \cdot V_{FFL}^3 \frac{s}{z} A_\phi$$

$$\text{Drehmoment } M = C_{TRQ} \cdot V_{FFL}^2 \frac{s}{z} \cdot A_\phi \cdot R_{TIP}$$

$$\frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^2}{m^2} \cdot m \equiv Nm$$

$$\lambda_{\omega_{TIP}} = \frac{R_{TIP} \cdot \omega}{V_{FFL}}$$

$$\omega = \frac{V_{FFL} \cdot \lambda_{\omega_{TIP}}}{R_{TIP}}$$

$$C_P \cdot V_{FFL}^3 \cdot \frac{s}{z} \cdot A_\phi = C_{TRQ} \cdot V_{FFL}^2 \cdot \frac{s}{z} \cdot A_\phi \cdot R_{TIP} \cdot \frac{V_{FFL} \cdot \lambda_{\omega_{TIP}}}{R_{TIP}}$$

$P = M \cdot \omega$

$$\text{Drehmomentenbeiwert } C_{TRQ} = \frac{C_P}{\lambda_{\omega_{TIP}}} \quad (59)$$

Beispiel:

$$\text{eigentlich: } C_{P,RTR} = 2 \eta_z \int_{r_{hub}/r_{tip}}^{r/r_{tip}=1} r/r_{tip} \cdot C_P(r) d(r/r_{tip})$$

→ Flächengleiche Ringe (Annulus)

$$\eta_z \frac{2}{r_{tip}^2} \int r^2 C_P$$

Festlegungen:

$$\frac{r_{si}}{r_{tip}} = \frac{2}{3Tm} (i^{3/2} - (i-1)^{3/2}) \quad 1 \leq i \leq m \quad (2)$$

$$\textcircled{1} \frac{r_i}{r_{tip}} = \sqrt{\frac{i}{m}} \quad \textcircled{1}; \quad \lambda_{\omega(r_{si})} = \lambda_{\omega(r_{tip})} \cdot \frac{r_{si}}{r_{tip}} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{4} \Sigma \equiv V_{DNW} / V_{FFL}^{(m)}; \quad r_{tip} \equiv r_{RTR}; \quad \lambda_{\omega(r_{tip})} \equiv \lambda_{\omega,RTR}; \quad \textcircled{5}$$

$$E \equiv LDR \equiv (C_{L,AFL} / C_{D,AFL})(r_{si}) \quad \textcircled{6}$$

$$\textcircled{7} Re_{(r_{si})}^* = r_{si} \cdot V_{FFL} / \nu; \quad \nu \text{ kinematische Zähigkeit } 15,1 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

Abkürzungen:

$$\textcircled{8} R_{(r_{si})} \equiv \sqrt{1 + [(1 - c_{\xi}^2(r_{si})) / \lambda_{\omega(r_{si})}^2]} \quad \textcircled{8} \quad (22)$$

$$\textcircled{9} K_{(r_{si})} \equiv (1 - c_{\xi}^2(r_{si})) (LDR \cdot \lambda_{DSC(r_{si})} + 1) / LDR_{(r_{si})} \cdot \lambda_{DSC(r_{si})} \quad \textcircled{9} \quad (38) \equiv C_{TRS} \equiv C_{D,RTR}$$

Integrationen:

$$C_{P,RTR} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} C_P(r_{si}) \quad \textcircled{10}$$

$$C_{TQ,RTR} = C_{P,RTR} / \lambda_{\omega,RTR} \quad \textcircled{11} \quad (59)$$

$$C_{D,RTR} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=m} (K_{(r_{si})} \cdot C_{L,AFL}(r_{si})) \quad \textcircled{12}$$

Formeln:

(13)  $C_{P(t_{si})} = \eta_{z, RTR} \cdot \eta_{RTR(t_{si})} \cdot C_{P(\omega, t_{si}) id.}$  (13) (28')

$\eta_{z, RTR} = (1 - (2 \ln 2 / z \sqrt{1 + \lambda_{DSC(t_{si})}^2}))^2$  (14) (41)

$\eta_{RTR(t_{si})} = (1 + \sqrt{1 - k_{t_{si}}}) (E_{(t_{si})} - \lambda_{DSC(t_{si})}) / E_{(t_{si})} (1 + \xi_{(t_{si})})$  (15) (39)

$C_{P(\omega, t_{si}) id.} = (R-1) (1 + \xi_{(t_{si})}) \lambda_{\omega(t_{si})}^2$  (16) (26)

$Re_{(t_{si})} = Re_{(t_{si})}^* \cdot 4\pi (1 - \xi_{(t_{si})}) / z \cdot \lambda_{DSC(t_{si})} \cdot C_{L, AFL(t_{si})}$  (17)

$f_{AFL t_{si}} = 8\pi \rho_{si} (1 - \xi_{(t_{si})}) / z \cdot C_{L, AFL(t_{si})} (1 + \xi_{(t_{si})}) \lambda_{DSC(t_{si})} \sqrt{1 + \lambda_{DSC(t_{si})}^2}$  (18) (49)

$\lambda_{DSC(t_{si})} = (1 + R_{(t_{si})}) \lambda_{\omega(t_{si})} / (1 + \xi_{(t_{si})})$  (19) (40)

(20)  $\xi_{DSC(t_{si})} = \arctan 1 / \lambda_{DSC(t_{si})}$  (20) (29')

D =	AFL DZW DSC	≡ airfoil ≡ abgewinkelt ≡ Disc	≡ aerodyn. Profil ≡ nach Stromabwärts ≡ in der Rotorebene
	FFL	≡ free flow	≡ ungestörte Strömung
	LDR	≡ lift to drag ratio	≡ Gleitzahl E
	RTR	≡ rotor	≡ den Rotor betreffend
	TRP	≡ tip	≡ Blattspitze betreffend
	TRS	≡ thrust	≡ Schub
	TRQ	≡ torque	≡ Drehmoment
	<del>D</del>	<del>≡ drag</del>	<del>≡ Widerstand</del>
	<del>L</del>	<del>≡ lift</del>	<del>≡ Auftrieb</del>
	<del>P</del>	<del>≡ power</del>	<del>≡ Leistung</del>
	<del>z</del>	<del>≡ number of blades</del>	<del>≡ Blattanzahl</del>
(A)		≡ C <sub>z</sub> = 1	≡ Auftriebsbeiwert = 1

$$Re = \frac{W_{DSC} \cdot f_{AFZ}}{\nu} \quad (35)$$

$$Re^* = \frac{\tau \cdot V_{FFZ}}{\nu} \quad (36) \quad \rightarrow \quad V_{FFZ} = \frac{Re^* \cdot \nu}{\tau}$$

$$\text{Es ist } W_{DSC} = V_{DSC} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}$$

$$\text{aber } V_{DSC} = V_{FFZ} \frac{(1+\beta)}{2}$$

$$\text{d.h. } W_{DSC} = V_{FFZ} \frac{(1+\beta)}{2} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2} \quad V_{FFZ} \text{ einsetzen}$$

$$\text{oder } W_{DSC} = \frac{Re^* \cdot \nu}{\tau} \cdot \frac{(1+\beta)}{2} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}$$

$$\text{d.h. } Re = \frac{Re^* \cdot \nu}{\tau} \cdot \frac{(1+\beta)}{2} \cdot \frac{f_{AFZ}}{\nu} \sqrt{1 + \lambda_{DSC}^2}, \quad f_{AFZ} \text{ einsetzen}$$

$$\rightarrow Re = Re^* \cdot \frac{4\pi(1-\beta)}{2 \cdot C_{L,AFZ} \cdot \lambda_{DSC}} \quad (37)$$

$$\nu_{Luft} = 15,1 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

$$\text{oder } Re = \frac{\tau \cdot V_{FFZ}}{\nu} \cdot \frac{4\pi(1-\beta)}{2 \cdot C_{L,AFZ} \cdot \lambda_{DSC}}$$

$E = m \cdot v^2$  Energie

Kraft =  $m \cdot v$   $\frac{kg \cdot m}{s^2}$

$P = m \cdot v^2$  Leistung

$\eta = \frac{V_{DNW}}{V_{FFL}}$

$$C_{P, \text{opt. Betz}} = \frac{16}{27} \approx 0,59259259\dots$$

$$C_{P, \text{ideal Betz}} = \frac{(1-\varrho^2) \cdot (1+\varrho)}{2}$$

$$\varrho = \frac{V_{DMW}}{V_{FFZ}}$$

$$C_{P, \text{ideal Hütter}} = (1+\varrho) \lambda_w^2 (R-1), \quad R = \sqrt{1 + \frac{1-\varrho^2}{\lambda_w^2}}$$

$\varrho = 1$  keine  
Abbremsung

$$C_{P, \text{ideal Hütter}} = 0$$

$$C_{P, \text{real, Hütter}} = C_{P, \text{ideal, Hütter}} \cdot \eta_z \cdot \eta_{LDR} \quad \text{---} \quad \eta_{LOT} \cdot \eta_{AS}$$

$$\eta_{LDR} = \frac{(LDR - \lambda_{DSC}) (1 + \sqrt{1-k})}{LDR (1+\varrho)} \quad (39)$$

$$\lambda_{DSC} = \lambda_w \frac{(R+1)}{(1+\varrho)}$$

$\varrho = 1$  keine Abbremsung  
 $\lambda_{DSC} = \lambda_w$

# Übersicht Vorlesungsplan 1993

22.3/2.3.93	Schlussworte	(1) 14.3	1.10.
29.3/9.3.93	Schlussworte / Definitionen	(2) 14.3	8.10.
12.4/26.3.93	Energiebilanz, Energieformen	(3) 21.3	15.10.
2.4.93	Übersicht Regenerative Energien	(4) Wind 21.3	22.10.
19.4/16.4.93	Entstehung, Potential	(5) 4.4	29.10.
26.4/23.4.93	Typologie	(6) 11.18.4.	5.11.
3.5/30.4.93	Theorie, Grundlagen	(7) 25.4.	12.11.
10.5/7.5.93	CP ideal	(8) <del>9.5</del> 23	19.11.
17.5/21.5.93	CP real	(9) 16.5	26.11.
24.5/28.5.93	FAL und Rest.	(10) 23.5	3.12.
31.5/4.6.93	Vorgehensweise GROWIAN	(11) 30.5	10.12.
7.6/11.6.93	Auslegung GROWIAN	(12) 6.6	17.12.
21.6/18.6.93	Prüfung + 1h Vorlesung	(13) 13.6.	7.1.
28/6		(14)	14.1.